

## Pemodelan Titik Data Kabur Teritlak (Generalized Fuzzy Data Point Modeling)

ROZAIMI ZAKARIA\* & ABD. FATAH WAHAB

### ABSTRAK

Di dalam kertas ini, pendekatan dalam mentakrifkan ketakpastian titik data melalui pendekatan konsep nombor kabur yang sedia ada dapat diitlakkan. Pengitlakkan ini termasuk pentakrifan ketakpastian data yang akan menjadi titik data kabur (titik kawalan kabur) selepas ditakrifkan oleh konsep nombor kabur. Kemudian, kajian ini juga membincangkan tentang proses pengkaburan (operasi potongan-alfa) terhadap titik data kabur tersebut dalam bentuk segitiga nombor kabur diiringi dengan beberapa teorem dan juga pembuktiannya. Selain itu, kami juga turut memodelkan titik data kabur tersebut melalui fungsi lengkung yang sedia ada iaitu fungsi lengkung Bezier. Selepas itu, turut dicadangkan juga ialah proses penyahkaburan terhadap titik data kabur selepas operasi potongan-alfa diimplementasikan bagi memperoleh penyelesaian titik data kabur rangup sebagai keputusan akhir yang turut dimodelkan melalui fungsi lengkung Bezier dengan disertai beberapa teorem bagi memahami bentuk data tersebut.

*Kata kunci:* Lengkung kabur; nombor kabur; operasi potongan-alfa; penyahkaburan; titik data kabur

### ABSTRACT

In this paper, the approach in defining the uncertainty data points through the concept of the existing fuzzy numbers can be generalized. This generalization includes the defining uncertainty data which will become fuzzy data point (fuzzy control point) after being defined by the fuzzy numbers concepts. Then, this study also discusses the fuzzification process (alpha-cut operation) of the fuzzy data points in the form of triangular fuzzy numbers that was accompanied by some theorems and their proofs. In addition, we also model the fuzzy data points through the existing curve function of Bezier curve function. Then, we also proposed a defuzzification process which was applied towards the fuzzy data points after the fuzzification process to obtain crisp fuzzy data points solution as the final result which was being modeled by using the Bezier curve function jointly with some theorems for more understanding.

*Keywords:* Alpha-cut operation; defuzzification; fuzzy curve; fuzzy data points; fuzzy number

### PENGENALAN

Hubungan antara konsep nombor kabur dan bidang pemodelan geometri adalah sangat berkait-rapat. Ini bermaksud, kebiasaannya pemodelan geometri dimodelkan melalui kewujudan set data melalui perwakilan lengkung dan permukaan (Farin 1999, 2002; Farin et al. 2002; Piegl & Tiller 1995; Rogers 2001; Salomon 2006; Yamaguchi 1988) yang menggunakan konsep nombor kabur (Dubois & Prade 1980; Klir & Yuan 1995; Klir et al. 1997; Zimmermann 1985) apabila set titik data tersebut menjadi ketakpastian titik data. Konsep nombor kabur yang digunakan untuk mentakrifkan ketakpastian titik data akan menjadi titik data kabur yang akan menyelesaikan kesukaran dalam memodelkan lengkung dan permukaan menggunakan ketakpastian titik data. Pemodelan titik data kabur ini yang dipersembahkan melalui lengkung dan permukaan dapat dirujuk pada (Abbasbandy 2001; Abbasbandy & Babolian 1998; Abbasbandy et al. 2008; Abd Fatah et al. 2004, 2009, 2010; Abd Fatah & Rozaimi 2012; Abd. Fatah 2008; Anile et al. 2000; Behforooz et al. 2010; Gallo & Spagnuolo 1998; Gallo et al. 1998, 2000; Rozaimi & Abd Fatah 2012).

Hubungan antara konsep nombor kabur dan juga operasi potongan-alfa adalah penting dalam memperihalkan ketakpastian titik data nyata. Konsep nombor kabur digunakan untuk mentakrifkan ketakpastian titik data yang menjadi titik data kabur. Sementara itu, operasi potongan-alfa digunakan bagi mengurangkan selang kabur yang dibina melalui titik data kabur (Dubois & Prade 1980; Zimmermann 1985).

Tujuan kertas ini ditulis adalah untuk mengkaji hubungan antara potongan-alfa bagi konsep nombor kabur dalam pemodelan titik data kabur melalui pembentukan lengkung. Kajian ini akan membawa kepada beberapa teorem yang menyokong tentang hubungan ini yang boleh dikatakan sebagai pemodelan titik data kabur teritlak.

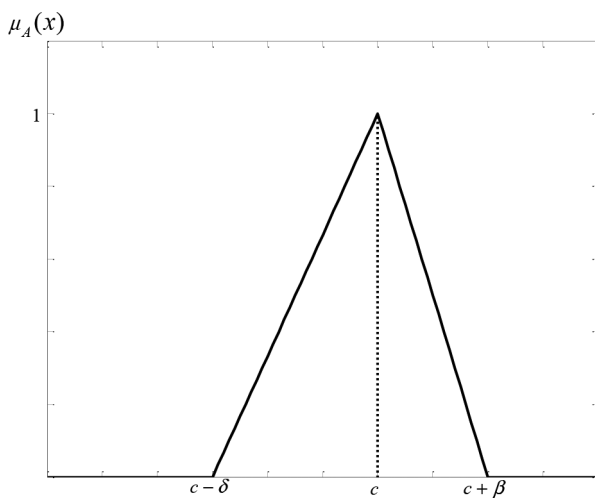
### TAKRIFAN ASAS BAGI KONSEP NOMBOR KABUR

*Takrifan 1.* Suatu set kabur dalam suatu wacana semesta,  $U$  dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi keahlian,  $\mu_A(x)$  yang memetakan nilai-nilai dalam selang  $[0,1]$ , iaitu  $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$  yang boleh diwakili dengan  $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}$ .

**Takrifan 2.** Suatu nombor kabur adalah set kabur pada garis nyata yang memenuhi syarat-syarat kenormalan dan kecembungan. Andaikan fungsi keahlian bagi segitiga nombor kabur,  $A$  yang dilambangkan dengan  $\tilde{A} = (c, \delta, \beta)$  ditakrifkan sebagai

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c-x}{\delta} & \text{jika } c-\delta \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{\beta} & \text{jika } c \leq x \leq c+\beta \\ 0 & \text{sebaliknya} \end{cases}$$

dengan  $c \in \circ$  adalah titik tengah dan  $\delta > 0$  adalah lebar kiri,  $\beta > 0$  adalah lebar kanan bagi  $A$  (Rajah 1).



RAJAH 1. Segitiga nombor kabur

#### OPERASI POTONGAN-ALFA

**Takrifan 3.** Misalkan  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , maka daripada  $\frac{(c-\delta)^{(\alpha)} - (c-\delta)}{c - (c-\delta)} = \alpha$  dan  $\frac{(c+\beta) - (c+\beta)^{(\alpha)}}{(c+\beta) - c} = \alpha$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= [c - \delta)^{(\alpha)}, c, (c+\beta)^{(\alpha)}] \\ &= [(c - (c-\delta))\alpha + (c - \delta), c, -((c+\beta) - c)\alpha + (c+\beta)]. \end{aligned} \quad (1)$$

**Teorem 1.** Misalkan nombor kabur  $A$  yang berpusat pada  $c$  dengan fungsi keahliannya dapat diberikan seperti pada Takrifan 3. Selang nombor kabur bagi  $A$  dilambangkan sebagai  $\tilde{A} = \langle \mu_{\tilde{A}}(x), u_A(c), \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle$  dengan  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ,  $\mu_{\tilde{A}}(c)$  dan  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  adalah masing-masing dengan nilai fungsi keahlian kiri, rangup dan kanan. Maka,  $\lim_{|\mu_{\tilde{A}}(x)| \rightarrow 1} \tilde{A} = \mu_A(c)$  dengan  $|\mu_{\tilde{A}}(x)|$  adalah nilai fungsi keahlian kiri dan kanan.

**Bukti.** Diberikan bahawa  $\tilde{A} = \langle \mu_{\tilde{A}}(x), u_A(c), \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle$ . Maka, daripada Takrif 3, diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \langle \{ \mu_{\tilde{A}}(x), u_A(c), \mu_{\tilde{A}}(x) \} \rangle \\ &= \left\langle \frac{(c-\delta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)} - (c-\delta)}{c - (c-\delta)}, u_A(c), \frac{-(c+\beta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)} + (c+\beta)}{(c+\beta) - c} \right\rangle \\ &= \langle (c-\delta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)} \\ &= [c - (c-\delta)] \mu_{\tilde{A}}(x) + (c-\delta), u_A(c), (c+\beta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)} \\ &= -[(c+\beta) - c] \mu_{\tilde{A}}(x) + (c+\beta) \rangle \\ &= \langle (c-\delta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)}, u_A(c), (c+\beta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)} \rangle. \end{aligned}$$

Bagi had  $\lim_{|\mu_{\tilde{A}}(x)| \rightarrow 1} \tilde{A} = \mu_A(c)$ , diberikan  $e > 0$ , kita mesti mencari  $s > 0$  iaitu  $0 < |\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| < s$ , kemudian  $|\tilde{A} - c| < e$ . Oleh itu,

$$\begin{aligned} & \left| \langle (c-\delta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)}, u_A(c), (c+\beta)^{\mu_{\tilde{A}}(x)} \rangle - c \right| < e \\ &= \left| [c - (c-\delta)] \mu_{\tilde{A}}(x) + (c-\delta) - c, u_A(c) \right. \\ & \quad \left. - c, -[(c+\beta) - c] \mu_{\tilde{A}}(x) + (c+\beta) - c \right| < e \\ &= \left| \delta \mu_{\tilde{A}}(x) - \delta, u_A(c) - c, \beta \mu_{\tilde{A}}(x) + \beta \right| < e \\ &= \left| \delta (\mu_{\tilde{A}}(x) - 1), u_A(c) - c, \beta (\mu_{\tilde{A}}(x) + 1) \right| < e_w. \end{aligned}$$

Teorem di atas menerangkan bahawa apabila nilai fungsi keahlian kiri dan kanan,  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  dan  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  menghampiri satu, maka mereka menghampiri nilai fungsi keahlian rangup  $\mu_A(c)$ .

**Teorem 2.** Misalkan segitiga nombor kabur  $A$  yang berpusat pada  $c$  dengan  $\delta > 0$  dan  $\beta > 0$  adalah lebar kiri dan kanan. Jika  $\alpha_i$  dan  $\alpha_j$  adalah potongan-alfa bagi segitiga nombor kabur dengan  $\alpha_i < \alpha_j$ , maka  $\tilde{A}_{\alpha_i} \subseteq \tilde{A}_{\alpha_j}$ .

**Bukti.** Misalkan fungsi keahlian bagi segitiga nombor kabur  $A$  diberikan berdasarkan Takrifan 3. Maka, selang kabur bagi  $A$  adalah  $\langle c - \delta, c, c + \beta \rangle$ . Jika selang kabur diperoleh oleh operasi potongan-alfa, maka selang bagi  $\tilde{A}_{\alpha_i}$  diperoleh iaitu  $\tilde{A}_{\alpha_i} = \langle A_{\alpha_i}, A_c, A_{\alpha_i} \rangle$  dan  $\tilde{A}_{\alpha_j} = \langle A_{\alpha_j}, A_c, A_{\alpha_j} \rangle$  dengan  $A_{\alpha_i}$  dan  $A_{\alpha_j}$  dan  $A_{\alpha_i}$  dan  $A_{\alpha_j}$  adalah masing-masing dengan potongan-alfa segitiga nombor kabur kiri dan kanan bagi  $A$  dengan  $\alpha_i < \alpha_j$  bagi setiap  $\alpha_i < \alpha_j \in (0, 1]$ . Bagi  $\alpha_i$ ,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{(c-\delta)_{\alpha_i} - (c-\delta)}{c - (c-\delta)} = \alpha_i, c, \frac{(c+\beta)_{\alpha_i} - (c+\beta)}{(c+\beta) - c} = \alpha_i \right\rangle \\ & \langle (c-\delta)_{\alpha_i} = [c - (c-\delta)] \alpha_i + (c-\delta), c, (c+\beta)_{\alpha_i} \\ & \quad = -[(c+\beta) - c] \alpha_i + (c+\beta) \rangle. \end{aligned}$$

Manakala bagi  $\alpha_j$ ,

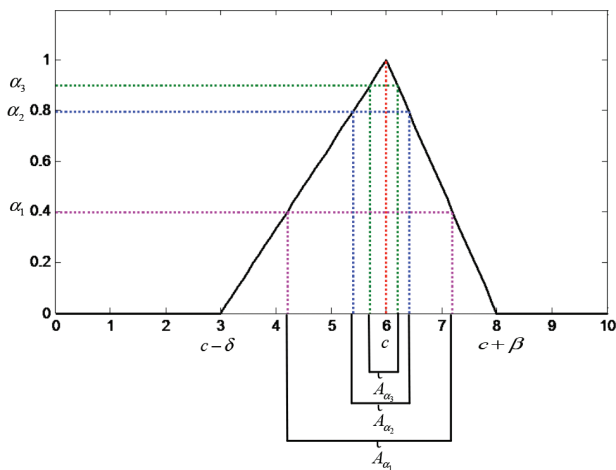
$$\begin{aligned} (c-\delta)_{\alpha_j} &= [c - (c-\delta)] \alpha_j + (c-\delta), c, (c+\beta)_{\alpha_j} \\ &= -[(c+\beta) - c] \alpha_j + (c+\beta). \end{aligned}$$

Oleh kerana  $\alpha_i < \alpha_j$ , maka

$$\begin{aligned} &\langle (c-\delta)_{\bar{\alpha}_i} < (c-\delta)_{\bar{\alpha}_j}, c, (c-\beta)_{\bar{\alpha}_i} < (c-\beta)_{\bar{\alpha}_j} \rangle \\ &\langle [(c-(c-\delta)]\bar{\alpha}_i + (c-\delta) \rangle < [(c-(c-\delta)]\bar{\alpha}_j + (c-\delta) \rangle, c, \\ &\langle -[(c+\beta)-c]\bar{\alpha}_i + (c+\beta) \rangle < -[(c+\beta)-c]\bar{\alpha}_j + (c+\beta) \rangle \\ &\langle \bar{\alpha}_i < \bar{\alpha}_j, c, \bar{\alpha}_i < \bar{\alpha}_j \rangle. \end{aligned}$$

Oleh itu,  $\bar{A}_{\alpha_i} = \langle A_{\bar{\alpha}_i}, A_c, A_{\bar{\alpha}_i} \rangle$  dan  $\bar{A}_{\alpha_j} = \langle A_{\bar{\alpha}_j}, A_c, A_{\bar{\alpha}_j} \rangle$ .

Maka,  $\Leftrightarrow \bar{A}_{\alpha_i} \subseteq \bar{A}_{\alpha_j}$  (Rajah 2).



RAJAH 2. Operasi potongan-alfa yang memberikan  $\alpha_i < \alpha_j \Leftrightarrow \bar{A}_{\alpha_i} \subseteq \bar{A}_{\alpha_j}$

TITIK DATA KABUR

Takrifan 4. Misalkan  $P = \{x|x \text{ adalah titik kabur}\}$  dan  $\bar{P} = \{P_i|P_i \text{ adalah titik data}\}$  yang merupakan set titik data kabur dengan  $P_i \in P \subset U$  dengan  $U$  adalah set

semesta dan  $\mu_p(P_i) : P \rightarrow [0,1]$  adalah fungsi keahlisan yang ditakrif sebagai  $\mu_p(P_i) = 1$  yang dapat dirumuskan dengan  $\bar{P} = \{(P_i, \mu_p(P_i)) | P_i \in \bar{P}\}$ . Oleh itu,

$$\mu_p(P_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } P_i \notin U \\ c \in (0,1) & \text{jika } P_i \in U \\ 1 & \text{jika } P_i \in U \end{cases}$$

dengan iaitu  $\mu_p(P_i) = \langle \mu_p(P_i^-), \mu_p(P_i), \mu_p(P_i^+) \rangle$  iaitu  $\mu_p(P_i^-)$  dan  $\mu_p(P_i^+)$  masing-masing adalah nilai gred keahlisan kiri dan gred keahlisan kanan yang dapat ditulis sebagai:

$$\bar{P} = \{\bar{P}_i : i = 0,1,2,\dots,n\}, \tag{3}$$

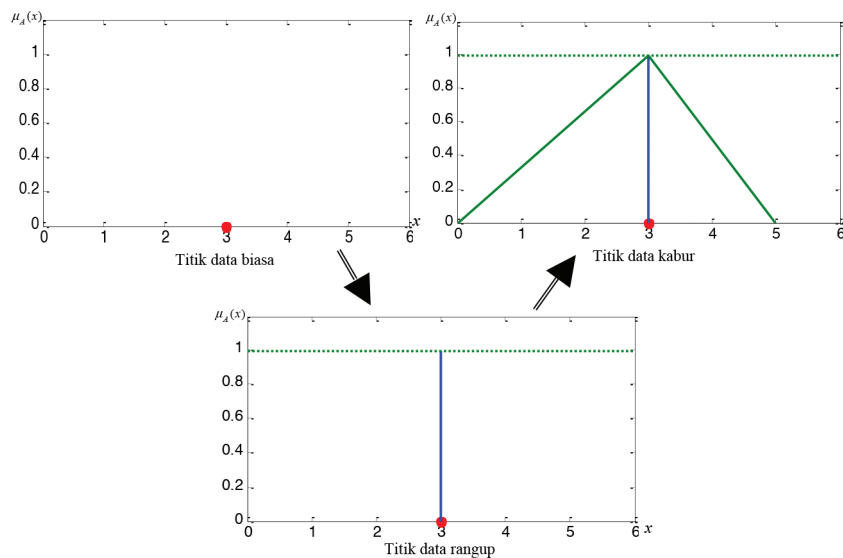
untuk setiap  $i$ , dengan  $\bar{P}_i = \langle \bar{P}_i^-, P_i, \bar{P}_i^+ \rangle$  dengan  $\bar{P}_i^-, P_i$  dan  $\bar{P}_i^+$  masing-masing adalah titik kawalan kabur kiri, titik kawalan rangup dan titik kawalan kabur kanan (Abd Fatah et al. 2004, 2009, 2010; Rozaimi & Abd Fatah 2012).

Berdasarkan Rajah 3, titik data kabur telah ditakrifkan dengan menggunakan konsep nombor kabur (segitiga nombor kabur). Bagi mencari selang titik data kabur, maka operasi potongan-alfa bagi segitiga nombor kabur digunakan yang telah ditakrifkan menerusi Takrifan 3.

Takrifan 5. Misalkan  $\alpha$  merupakan potongan-alfa terhadap setiap titik data kabur,  $\bar{P}_i$  dengan  $\bar{P}_i \in \bar{P}$ . Maka, proses potongan-alfa terhadap  $\bar{P}_i$  yang juga dikenali sebagai proses pengkaburan dapat dinyatakan melalui persamaan berikut.

$$\bar{P}_{\alpha_i} = \langle \bar{P}_{\alpha_i}^-, P_i, \bar{P}_{\alpha_i}^+ \rangle, \tag{4}$$

dengan  $\bar{P}_{\alpha_i}^-$  dan  $\bar{P}_{\alpha_i}^+$  adalah nilai titik data kabur-kiri dan kabur-kanan selepas potongan-alfa,  $P_i$  merupakan titik data rangup bagi setiap  $\alpha \in (0,1]$  dan  $i = 0,1,\dots,n$ .



RAJAH 3. Proses pentakrifan titik data kabur

*Takrifan 6.* Misalkan  $\tilde{P}_i$  adalah titik data kabur selepas operasi potongan-alfa diimplementasikan. Maka,  $\bar{P}_i$  adalah titik data penyahkaburan bagi  $\tilde{P}_i$  jika bagi setiap  $\tilde{P}_i \subset \bar{P}_i \in \bar{P}$  dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{P} = \{\bar{P}_i\} \text{ bagi setiap } i = 0, 1, \dots, n, \tag{5}$$

dengan setiap  $\bar{P}_i = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^3 \langle P_i^- + P_i + \tilde{P}_i^- \rangle$  (Abd. Fatah et al. 2004, 2009). Proses penyahkaburan ini dapat digambarkan melalui Rajah 4.

CONTOH BERANGKA: PEMODELAN TITIK DATA KABUR

Bagi lebih memahami mengenai titik data kabur dan proses yang terlibat untuk memperoleh titik data kabur rangup, maka bahagian ini akan memberikan contoh berangka dan juga titik data kabur ini turut dimodelkan menerusi model lengkung Bezier.

*Takrifan 7.* Andaikan  $\tilde{P}_i$  adalah  $(n + 1)$  set titik kawalan kabur dengan  $P_i$  adalah titik kawalan rangup, maka model lengkung Beizer kabur,  $\tilde{B}(t)$  dapat ditakrifkan sebagai

$$\tilde{B}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_i B_i^n(t) \text{ bagi } t \in [0,1], \tag{6}$$

dengan  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  adalah Bernstein ke- $i$  polinomial rangup bagi  $n$  darjah (Abd. Fatah et al. 2004, 2009).

Berdasarkan Takrif 7, titik kawalan kabur merupakan titik data kabur. Titik kawalan kabur ini berperanan sebagai rangka bagi pembentukan lengkung oleh model lengkung Bezier. Akan tetapi, bukan semua titik kawalan kabur adalah titik data kabur sebagaimana semua titik data kabur dapat dijadikan sebagai titik kawalan kabur. Bagi memodelkan titik data kabur menerusi model lengkung Bezier yang ditakrifkan, maka titik data kabur

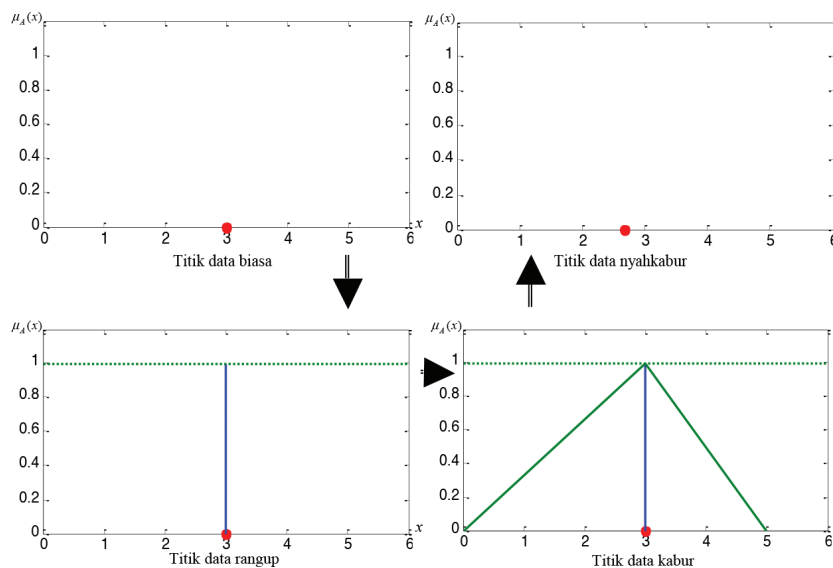
berserta proses yang terlibat seperti pengkaburan dan juga penyahkaburan dapat diberikan dalam bentuk Jadual 1.

Rajah 5(b) menunjukkan bahawa model lengkung Bezier kabur selepas operasi potongan-alfa diaplikasikan dengan  $\tilde{P}_{i=0, \dots, 3, \alpha=0.5} \subset \tilde{P}_{i=0, \dots, 3, \alpha=0.8}$ . Ini dapat membuktikan Teorem 2 secara grafik. Selain itu, rajah ini juga menunjukkan jika nilai alfa meningkat, maka fungsi lengkung Bezier kabur akan mendekati fungsi lengkung Bezier rangup. Ini dapat dibuktikan melalui Teorem 3.

*Teorem 3.* Jika  $\alpha$  menjadi perwakilan bagi operasi potongan-alfa bagi titik data kabur,  $P = \langle P(\tilde{P}^-) \rangle$ ,  $P, P(\tilde{P}^-) \rangle$  dengan  $P(\tilde{P}^-) \rangle$  dan  $P(\tilde{P}^-) \rangle$  adalah masing-masing dengan titik data kabur kiri dan kanan selepas operasi potongan-alfa dan  $P$  adalah titik data rangup. Jika had  $\tilde{P} = P$ , maka had  $\tilde{B}(t) = B(t)$  dengan  $\tilde{B}(t)$  adalah fungsi lengkung Bezier kabur.

*Bukti.* Diberikan  $e > 0$ , kita mesti mencari  $s > 0$  iaitu  $0 < |\alpha - 1| < s$ , maka  $|\tilde{P} - P| < e$ . Bagi membuktikan had  $\tilde{B}(t) = B(t)$ , maka diberikan  $\tilde{P} = \langle P(\tilde{P}^-) \rangle, P, P(\tilde{P}^-) \rangle$  (adalah selang titik data kabur.  $B(t)$  adalah fungsi lengkung Bezier. Dengan menggunakan selang titik data kabur, maka

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \langle P(\tilde{P}^-) \rangle, P, P(\tilde{P}^-) \rangle \\ B(t)(\tilde{P}) &= \langle B(t)(P(\tilde{P}^-) \rangle, \\ &B(t)(P), B(t)(P(\tilde{P}^-) \rangle) \\ \tilde{B}(t)(P) &= \langle \tilde{B}(t)(P)(\tilde{P}^-) \rangle, \\ &\tilde{B}(t)(P), \tilde{B}(t)(P)(\tilde{P}^-) \rangle. \end{aligned}$$

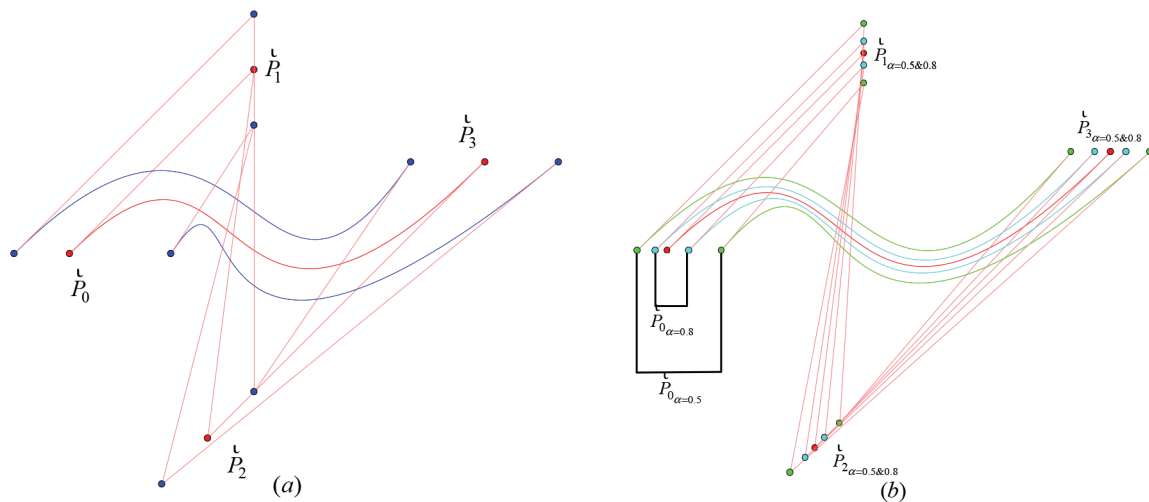


RAJAH 4. Proses penyahkaburan titik data kabur

JADUAL 1. Operasi potongan-alfa terhadap titik-titik data kabur dengan dua nilai alfa,  $\alpha = 0.5$  dan  $\alpha = 0.8$

Titik data kabur	$\vec{P}_i$				
	Titik data kabur kiri, $P_i^-$		$P_i$	Titik data kabur kanan, $\vec{P}_i^+$	
$i = 0$	(-11, 0)		(-5, 0)	(6,0)	
$i = 1$	(15, 26)		(15, 20)	(15,14)	
$i = 2$	(15, -15)		(10, -20)	(5,-25)	
$i = 3$	(32, 10)		(40, 10)	(48,10)	
Pengkaburan $\alpha=0.5$ dan $0.8$	$\vec{P}_{i-\alpha=0.5}^-$	$\vec{P}_{i-\alpha=0.8}^-$	$P_i$	$\vec{P}_{i-\alpha=0.5}^+$	$\vec{P}_{i-\alpha=0.8}^+$
$i = 0$	(-8, 0)	(-6.2,0)	(-5, 0)	(-2.8,0)	(0.5, 0)
$i = 1$	(15, 23)	(15,21.2)	(15, 20)	(15,18.8)	(15, 17)
$i = 2$	(12.5, -17.5)	(11,-19)	(10, -20)	(9,-21)	(7.5, -22.5)
$i = 3$	(36, 10)	(38.4,10)	(40, 10)	(41.6,10)	(44, 10)

Berdasarkan Jadual 1, maka model lengkung Bezier kabur selepas operasi potongan-alfa,  $\vec{B}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i B_i^\alpha(t)$  dapat diberikan masing-masing pada Rajah 5(a) dan 5(b) berikut.



RAJAH 5. Model lengkung Bezier kabur (a) sebelum dan (b) selepas operasi potongan-alfa

Maka,  $\vec{B}(t) = \langle \vec{B}(t)(\vec{P}^-)_\alpha, \vec{B}(t)(\vec{P}^-)_\alpha \rangle$ . Oleh itu, had  $\vec{B}(t) = B(t)$  oleh kerana had  $\vec{P} = P$ .

Untuk mendapatkan penyelesaian titik data kabur rangup sebagai keputusan akhir yang memberikan titik-titik data nyahkabur yang singular, maka proses penyahkaburan digunakan bagi tujuan tersebut melalui Takrifan 6.

Pada Rajah 6, titik-titik data nyahkabur dimodelkan menerusi model lengkung Bezier yang menunjukkan bahawa jika titik-titik data kabur berbentuk segitiga simetri, maka diakhir proses penyahkaburan akan diperoleh titik-titik data nyahkabur yang bersamaan dengan titik-titik data rangup seperti yang ditunjukkan pada titik-titik data,  $P_1, P_2$  dan  $P_3$ . Tetapi jika tidak sama, maka ia terjadi seperti pada titik data,  $P_0$ . Ini disebabkan oleh jarak di antara titik data rangup dan titik data kabur kanan adalah lebih besar berbanding jarak di antara titik data rangup dan titik data kabur kiri yang membawa kepada pernyataan Teorem 4 seperti berikut.

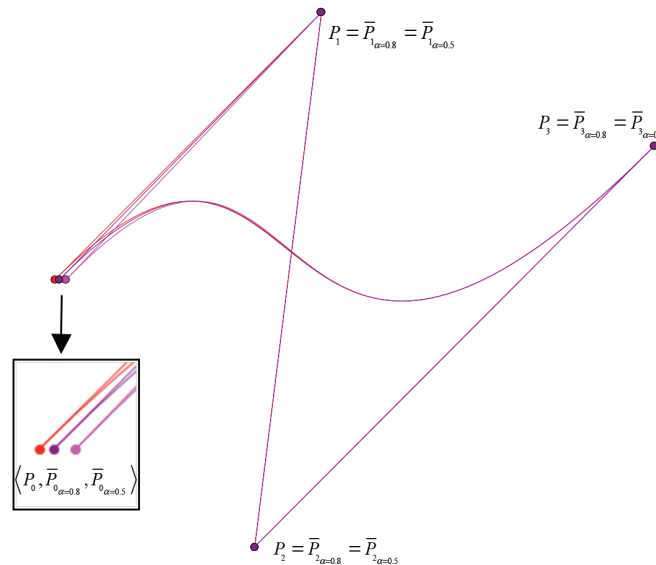
**Teorem 4.** Misalkan  $\alpha$  adalah perwakilan kepada operasi potongan-alfa bagi titik data kabur iaitu  $\vec{P}_i = \langle \vec{P}_{i-\alpha}^- = (P_i - \delta)_i, P_i, \vec{P}_{i-\alpha}^+ = (P_i + \beta)_i \rangle$  dengan  $\vec{P}_{i-\alpha}^-$  dan  $\vec{P}_{i-\alpha}^+$  adalah titik data kabur kiri dan kanan selepas operasi potongan-alfa digunakan,  $P$  adalah titik data rangup dan  $\delta$  dan  $\beta$  adalah jarak kiri dan kanan dari  $P$ . Jika  $\beta < \delta$  atau  $\delta < \beta$ , maka penyelesaian titik data kabur rangup(selepas penyahkaburan) berada sama ada pada sebelah kiri atau kanan bagi  $P$ .

**Bukti.** Diberikan bahawa  $\vec{P}_i = \langle \vec{P}_{i-\alpha}^- = (P_i - \delta)_i, P_i, \vec{P}_{i-\alpha}^+ = (P_i + \beta)_i \rangle$ . Maka daripada Takrifan 3, diperoleh  $\left\langle \frac{(P_i - \delta)_i - (P_i - \delta)}{P_i - (P_i - \delta)} = \alpha, P_i, \frac{(P_i + \beta)_i - (P_i + \beta)}{(P_i + \beta) - P_i} = \alpha \right\rangle$ . Oleh itu, bagi  $\beta < \delta$ , maka diperoleh;

$$\begin{aligned}
 & -[(P_i + \beta) - P_i] \alpha + (P_i + \beta) < [P_i - (P_i - \delta)] \alpha + (P_i - \delta) \\
 & -\alpha P_i - \alpha \beta + \alpha P_i + P_i + \beta < \alpha P_i - \alpha P_i + \alpha \delta + P_i - \delta \\
 & -\beta < \delta.
 \end{aligned}$$

JADUAL 2. Titik-titik data nyahkabur selepas proses pengkaburan

Penyahkaburan	$\bar{P}_{i,\alpha=0.5}$	$P_i$	$\bar{P}_{i,\alpha=0.8}$
$i = 0$	(-4.1667,0)	(-5, 0)	(-4.6667,0)
$i = 1$	(15,20)	(15, 20)	(15,20)
$i = 2$	(10,-20)	(10, -20)	(10,-20)
$i = 3$	(40,10)	(40, 10)	(40,10)



RAJAH 6. Titik-titik data nyahkabur yang dimodelkan menerusi model lengkung Bezier

Manakala, bagi  $\delta < \beta$ , maka diperoleh

$$[P_i - (P_i - \delta)] \alpha + (P_i - \delta) < -[(P_i + \beta)] - P_i] \alpha + (P_i + \beta) \\ \alpha P_i - \alpha P_i + \alpha \delta + P_i - \delta < -\alpha P_i - \alpha \beta + \alpha P_i + P_i + \beta \\ -\delta < \beta.$$

PERBINCANGAN DAN KESIMPULAN

Pemodelan titik data kabur teritlak ini dinyatakan berdasarkan penggunaan konsep nombor kabur dan juga operasi potongan-alfa. Ini kerana konsep nombor kabur yang digunakan dijadikan sebagai suatu konsep bagi mentakrifkan ketakpastian titik data dengan pengertian konsep nombor kabur itu sendiri yang menyelesaikan masalah yang melibatkan titik data nyata. Bagi operasi potongan-alfa pula, operasi ini digunakan untuk mendapatkan selang keyakinan berdasarkan nilai alfa yang ditetapkan. Operasi ini juga dikenali sebagai proses pengkaburan bagi titik data kabur sebelum proses penyahkaburan digunakan untuk mendapatkan titik data nyahkabur bagi memperoleh penyelesaian titik data kabur rangup.

Seterusnya, kesemua proses dalam mentakrifkan ketakpastian titik data sehingga titik data nyahkabur diperoleh turut dimodelkan dengan menggunakan fungsi lengkung Bezier sebagai tambahan kepada pemahaman konsep nombor kabur dalam mentakrifkan ketakpastian data.

PENGHARGAAN

Jutaan terima kasih diucapkan kepada Kementerian Pelajaran Malaysia serta Pusat Pengurusan dan Inovasi, Universiti Malaysia Terengganu (UMT) kerana memberi tajaan saraan hidup, MyPhD berserta dana penyelidikan (FRGS, vot59244) dan menyediakan kemudahan bagi menjalankan kajian ini.

RUJUKAN

Abbasbandy, S. 2001. Interpolation of fuzzy data by complete splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 8(3): 587-594.

Abbasbandy, S. & Babolian, E. 1998. Interpolation of fuzzy data by natural splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 5(2): 457-463.

Abbasbandy, S., Ezzati, R. & Behforooz, H. 2008. Interpolation of fuzzy data by using fuzzy splines. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 16(1): 107-115.

Abd. Fatah Wahab, Jamaludin Md Ali, Ahmad Abd Majid & Abu Osman Md. Tap. 2010. Penyelesaian masalah data ketakpastian menggunakan Splin-B kabur. *Sains Malaysiana* 39(4): 661-670.

Abd. Fatah Wahab & Rozaimi Zakaria. 2012. Fuzzy interpolation rational cubic bezier curves modeling of blurring offline handwriting signature with different degree of blurring. *Applied Mathematical Sciences* 6(81): 4005-4016.

- Abd. Fatah Wahab 2008. *Pemodelan Geometri Menggunakan Teori Set Kabur*. Universiti Sains Malaysia (tidak diterbitkan).
- Abd. Fatah Wahab, Jamaluddin Md Ali & Ahmad Abd. Majid. 2009. Fuzzy geometric modeling. In *Proceedings, International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization, CGIV 2009*.
- Abd. Fatah Wahab, Jamaluddin Md Ali, Ahmad Abd. Majid & Md. Tap Abu Osman. 2004. Fuzzy set in geometric modeling. In *Proceedings, International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization, CGIV 2004*.
- Anile, A.M., Falcidieno, B., Gallo, G., Spagnuolo, M. & Spinello, S. 2000. Modeling uncertain data with fuzzy B-splines. *Fuzzy Sets and Systems* 113(3): 397-410.
- Behforooz, H., Ezzati, R. & Abbasbandy, S. 2010. Interpolation of fuzzy data by using E(3) cubic splines. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 60(4): 383-392.
- Dubois, D. & Prade, H. 1980. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press.
- Farin, G., Hoschek, J. & Kim, M-S. 2002. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. The Netherlands: Elsevier Science B.V.
- Farin, G. 2002. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. 5th ed. USA: Academic Press.
- Farin, G. 1999. *NURBS for Curve and Surface Design: From Projective Geometry to Practical Use*. 2nd ed. Massachusetts: AK Peters, Ltd.
- Gallo, G. & Spagnuolo, M. 1998. Uncertainty coding and controlled data reduction using fuzzy-B-splines. In *Proceedings Computer Graphics International*, 22-26 June.
- Gallo, G., Spagnuolo, M. & Spinello, S. 1998. Rainfall estimation from sparse data with fuzzy B-splines. *Journal of Geographic Information and Decision Analysis* 2(2): 194-203.
- Gallo, G., Spagnuolo, M. & Spinello, S. 2000. Fuzzy B-splines: A surface model encapsulating uncertainty. *Graphical Models* 62(1): 40-55.
- Klir, G.J. & Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. New York: Prentice Hall.
- Klir, G.J., Clair, U.S. & Yuan, B. 1997. *Fuzzy Set Theory: Foundation and Application*. New Jersey: Prentice Hall.
- Piegl, L.A. & Tiller, W. 1995. *The NURBS Book*. Berlin, Germany: Springer.
- Rogers, D.F. 2001. *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective*. USA: Academic Press.
- Rozaimi Zakaria & Abd Fatah Wahab. 2012. Fuzzy B-spline modeling of uncertainty data. *Applied Mathematical Sciences* 6(140): 6971-6991.
- Salomon, D. 2006. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. USA: Springer.
- Yamaguchi, F. 1988. *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design*. Germany: Springer-Verlag.
- Zimmermann, H-J. 1985. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. USA: Kluwer Academic.

Jabatan Matematik, Fakulti Sains dan Teknologi  
Universiti Malaysia Terengganu (UMT)  
21030 Kuala Terengganu, Terengganu  
Malaysia

\*Pengarang untuk surat-menyurat; email: rozaimi\_z@yahoo.com

Diserahkan: 25 Januari 2013

Diterima: 26 Ogos 2013